Correction du devoir surveillé $n°1$

Exercice 1:

1. (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est constante.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$.
   (c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]-1;1[, f(x) > M$.
2. (a) $\text{non}(\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x| < y) \iff \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant y$.
   Montrons la négation de la propriété de l'énoncé.
   Posons $y = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Alors $|x| \geqslant y$.
   (b) $\text{non}(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ |x| < y) \iff \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant y$.
   Montrons la propriété de l'énoncé.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = |x| + 1$.
   Alors $|x| < y$.
   (c) $\text{non}(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3,\ a^2 + b^2 = c^2 \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0))$
   $\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3,\ a^2 + b^2 = c^2$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
   Montrons la négation de la propriété de l'énoncé.
   Posons $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ alors $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) $\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}\right) = 2\cos(2x)\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$
   (b) $\cos(x) - \cos(3x) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}\right) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\right)\right) = \mathfrak{Re}\left(-2\mathbf{i}\sin(x)\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x}\right) = 2\sin(x)\sin(2x)$
   (c) $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$

Exercice 2:

1. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$. On conjecture "$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2n + 1$".
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété "$a_n = 2n + 1$".
   Montrons par récurrence double que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : $2 \times 0 + 1 = 1 = a_0$ et $2 \times 1 + 1 = 3 = a_1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ et $P(n + 1)$ sont vraies.
   $$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n = 2(2(n + 1) + 1) - (2n + 1) = 4n + 6 - (2n + 1) = 2n + 5 = 2(n + 2) + 1\,,$$
   donc $P(n + 2)$ est vraie.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2n + 1$

Exercice 3:

1. Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ i.e. $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$.
   D'où $2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$ i.e. $2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} - 5$ i.e. $\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2} \in \mathbb{Q}$.
2. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.
   Donc $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec p et q premiers entres eux tel que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, d'où $6q^2 = p^2$.
   Donc p^2 est pair, donc p est pair i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.
   On a donc $3q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair, donc q est pair. Ce qui rentre en contradiction avec le fait que p et q soient premiers entre eux.
3. Par contraposée de 1), on a donc $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4:

1. Les solutions de $(E) : z^5 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquièmes de l'unité, c'est à dire les $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in [\![0;4]\!]$.
2. (a) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$
   (b) On résout l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Tout d'abord, $z = 0$ n'est pas solution de cette équation, donc on peut supposer $z \in \mathbb{C}^*$ dans la suite. On divise cette équation par z^2 :
$$z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0.$$
En posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$, on a $Z^2 = z^2 + 2 + z^{-2}$. Donc l'équation devient $Z^2 + Z - 1 = 0$. On obtient une équation du second degré en Z, qu'on sait résoudre : le discriminant vaut $\Delta = 5$, et on obtient $Z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On obtient donc les deux équations suivantes en z :
$$(E_+) \quad z^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 \text{ et } (E_-) \quad z^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0.$$
Le discriminant de ces équations vaut $\Delta_\pm = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, et les solutions de $(E_\pm)$ sont donc $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{\pm 2\sqrt{5} + 10}}{4}$ et $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{\pm 2\sqrt{5} + 10}}{4}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ est :
$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}; \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \end{array} \right\}$$
3. (a) On a obtenu l'ensemble des solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ de deux manières différentes, sous des formes différentes. Reste à présent à identifier la solution $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{5}}$ parmi celles-ci. Puisque $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, les parties réelle et imaginaire de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ sont donc strictement positives. Il s'agit donc de la solution $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient donc :
$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$
De même $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, la partie réelle de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est strictement négative, sa partie imaginaire est strictement positive. Il s'agit donc de la solution $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient donc :
$$\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin(4\pi/5) = \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}.$$
4. (a) Voir plus loin.
   (b) Le triangle KOB est rectangle en O, d'où par Pythagore :
$$BK^2 = KO^2 + OB^2 = (1/2)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}.$$

Donc $BK = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Puisque B et J sont sur le même cercle de centre K, on a $KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Les points K, O et L sont alignés. Donc $OJ = KJ - KO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Enfin L est le milieu de $[OJ]$, donc $OL = \frac{OJ}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

D'après les questions précédentes, $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, donc les points L et A_1 ont même abscisse. Le point L est donc la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.

(c)